

Mathematische Grundlagen der Informatik 1

Matrizen und Lineare Algebra

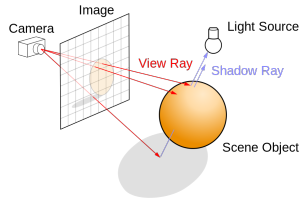
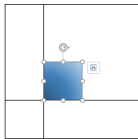
W. Gansterer, C. Plant

24. November 2016

Matrizen und Lineare Algebra

Herausforderungen im Alltag der Informatik

- Drehen, verschieben, verändern eines Objektes
- Abbildung eines 3D Objektes auf einem Bildschirm (2D)
- Markieren eines Objekts per Mausklick
- Bewegung eines Roboterarms mit mehreren Gelenken



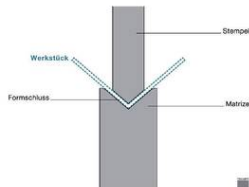
Überblick

1 Matrizen und Lineare Algebra

- Matrizen
 - Rechnen mit Matrizen
 - Zusammenhang Lineare Abbildungen - Matrizen
- Lineare Gleichungssysteme
 - Gauß Algorithmus
 - Inverse Matrix
 - Geometrische Interpretation
- Eigenwerte, Eigenvektoren, Basistransformation
 - Determinante
 - Eigenwerte, Eigenvektoren
 - Basistransformation
 - Diagonalisierung
- Skalarprodukt und orthogonale Abbildungen
 - Skalarprodukt
 - Orthogonale Abbildungen
 - geometrische Transformationen

Matrizen

“Matrix” - Was ist das?



“Matrix” - Was ist das?

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Element/Koeffizient

m Spaltenvektoren

n Zeilenvektoren

$n \times m$ Matrix

(n, m) = Dimension der Matrix

Anwendung von Operationen

$$2 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Kompakte Darstellung

$$i : x_1 + 3x_2 = 25$$

$$ii : 5x_1 - x_2 = 2$$

↓

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Addition

Addition nur möglich bei Matrizen gleicher Dimension

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d+j & e+k & f+l \end{pmatrix}$$

- assoziativ $\rightarrow (A + B) + C = A + (B + C)$
- kommutativ $\rightarrow A + B = B + A$

Multiplikation mit Skalar

Bei der Multiplikation mit einem Skalar wird jeder Eintrag der Matrix mit dem Skalar multipliziert. Umgekehrt kann jeder beliebige Skalar aus einer Matrix herausgehoben werden.

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot g + b \cdot j & a \cdot h + b \cdot k & a \cdot i + b \cdot l \\ c \cdot g + d \cdot j & c \cdot h + d \cdot k & c \cdot i + d \cdot l \\ e \cdot g + f \cdot j & e \cdot h + f \cdot k & e \cdot i + f \cdot l \end{pmatrix}$$

- assoziativ $\rightarrow (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- nicht kommutativ $\rightarrow A \times B \neq B \times A$
- distributiv mit Matrizenaddition $\rightarrow A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

Transponieren

Transponierte Matrix A^T

Ist $A \in K^{n \times m}$, so entsteht die transponierte Matrix $A^T \in K^{m \times n}$ durch Vertauschen von Zeilen und Spalten, d. h., die i -te Spalte von A ist die i -te Zeile von A^T .

Für eine quadratische Matrix entspricht das dem Spiegeln der Matrixelemente an der Hauptdiagonale.

Beispiele

- $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$
- $(A^T)^T = A$

Symmetrische Matrix

Symmetrische Matrix

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist symmetrisch, wenn gilt $A = A^T$.

Beispiel

- $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & f & g \\ c & g & h \end{pmatrix}$

Hermiteische Matrix

Eine Hermiteische Matrix ist eine spezielle **komplexe** Matrix.

Hermiteische Matrix

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt *hermitesch*, wenn gilt $A^T = \bar{A}$, d. h. $\bar{A}^T = A$.

Beachten Sie, dass die Diagonaleinträge einer hermiteschen Matrix reell sein müssen!

Beispiele

$$\bullet \begin{pmatrix} a & \bar{b} & \bar{c} \\ b & d & \bar{e} \\ c & e & f \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & i & 3+i \\ -i & 2 & 7-i \\ 3-i & 7+i & 4 \end{pmatrix}$$

Rang einer Matrix

Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix A ist die maximale Anzahl linear unabhängiger (Zeilen- bzw.) Spaltenvektoren in der Matrix.

Beispiele

- $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A^T)$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rang}(A) = 2$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rang}(B) = 1$
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rang}(C) = 2$

Spezielle Eigenschaften

Reguläre Matrix

*Ist der Rang einer quadratischen Matrix (Anzahl Zeilen = Anzahl Spalten) gleich ihrer (Zeilen- = Spalten-) Dimension, so hat sie **vollen Rang** und ist eine **reguläre Matrix**.*

Diagonalmatrix

*Eine quadratische Matrix, deren Einträge, ausgenommen jene auf der Hauptdiagonale, gleich Null sind, nennt man **Diagonalmatrix**.*

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Spezielle Matrizen

Einheitsmatrix

Eine Diagonalmatrix, die auf der Hauptdiagonale nur Einträge gleich 1 hat, nennt man eine **Einheitsmatrix** I .

- $A \times I = I \times A = A$

$$I_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ *Vergleiche neutrales Element bezüglich Multiplikation!*

Inverse Matrix

Inverse Matrix

Zu jeder regulären Matrix A existiert die inverse Matrix A^{-1} , die dadurch definiert ist, dass

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

- $(A^{-1})^{-1} = A$

→ *Vergleiche inverses Element bezüglich Multiplikation!*

Zusammenhang Lineare Abbildungen - Matrizen

Satz

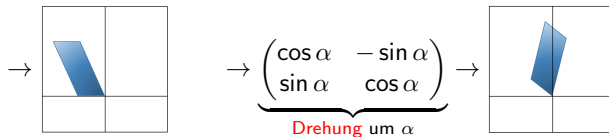
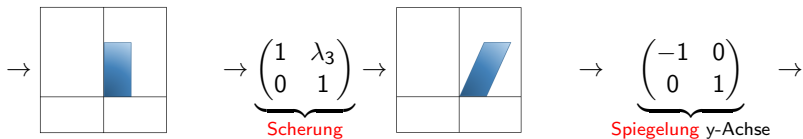
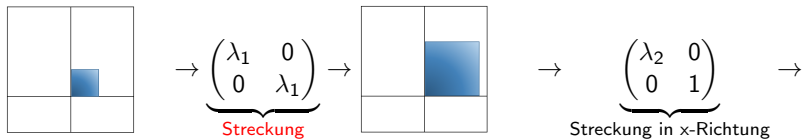
Zu jeder linearen Abbildung $f : K^n \rightarrow K^m$ gibt es genau eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ mit der Eigenschaft $f(x) = Ax$ für alle $x \in K^n$.

Umgekehrt definiert jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ eine lineare Abbildung $f : K^n \rightarrow K^m$ als $f(x) := Ax$.

Zusammenhang Lineare Abbildungen - Matrizen

$$\begin{aligned}
 f(x) &:= Ax \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix } A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Vektor } x}
 \end{aligned}$$

Beispiele für lineare Abbildungen im \mathbb{R}^2



Eine wichtige Ausnahme ...

Translation (Verschiebung)

- $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
- Für jede lineare Abbildung f gilt: $f(0) = 0$

⇒ Translation ist *keine* lineare Abbildung

Verknüpfung von Linearen Abbildungen

Sind $f : K^n \rightarrow K^m$ und $g : K^m \rightarrow K^r$ lineare Abbildungen, so ist die Hintereinanderausführung möglich und auch $g \circ f : K^n \rightarrow K^r$ ist linear.

Zur Erinnerung: Verknüpfung immer von rechts nach links!

Die Verknüpfung zweier linearer Abbildungen $g \circ f$ entspricht der Multiplikation ihrer Koeffizientenmatrizen:

$$f(x) = Fx, \quad g(x) = Gx$$

$$\Rightarrow \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (G \times F)x$$

Lineare Gleichungssysteme

Problemstellung

- Gegeben: m lineare Gleichungen mit n Unbekannten.
- System von Gleichungen kann beschrieben werden durch
 - Matrix $A \in K^{m \times n}$
 - Ergebnisvektor $b \in K^m$
 - Vektor der Unbekannten $x \in K^n$

→ $Ax = b$

- $b \neq 0 \dots$ *inhomogenes* Gleichungssystem
 - $b = 0 \dots$ *homogenes* Gleichungssystem
- $\text{Lös}(A, b) := \{x \in K^n \mid Ax = b\}$
- Interpretation als lineare Abbildung:
Lös(A, b) ist die Menge der $x \in K^n$, die durch die lineare Abbildung A auf den Vektor b abgebildet werden.

Gauß Algorithmus

Der Gauß Algorithmus kann verwendet werden zur Bestimmung

- des Rangs der Matrix A
- der Lösbarkeit/der Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems
- der Lösungen des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$
- der Lösungen des Gleichungssystems $Ax = b$
- der Inversen von A (in erweiterter Form)
- der Determinante von A

... siehe nächster Abschnitt!

Gauß Algorithmus

Beim Gauß Algorithmus wird mithilfe von elementaren Zeilenumformungen die (erweiterte) Koeffizientenmatrix in Zeilen-/Stufenform gebracht.

Beim Gauß Algorithmus wird mithilfe von **elementaren Zeilenumformungen** die (erweiterte) Koeffizientenmatrix in Zeilen-/Stufenform gebracht.

Elementare Zeilenumformungen:

- Vertauschen von Zeilen
- Addition/Subtraktion des λ -fachen einer Zeile z_i zu einer anderen Zeile z_j
- Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \neq 0$

... verändern die Lösung des linearen Gleichungssystems nicht!

Beim Gauß Algorithmus wird mithilfe von elementaren Zeilenumformungen die **(erweiterte) Koeffizientenmatrix** in die Zeilen-/Stufenform gebracht.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Koeffizientenmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{array} \right)}_{\text{erweiterte Koeffizientenmatrix}}$$

Beim Gauß Algorithmus wird mithilfe von elementaren Zeilenumformungen die (erweiterte) Koeffizientenmatrix in die **Zeilen-/Stufenform** gebracht.

Kopf/Leitkoeffizient einer Zeile = das erste Element ungleich Null

Zeilen-/Stufenform:

- Nach Nullzeilen dürfen nur Nullzeilen stehen / alle Nichtnullzeilen müssen über den Nullzeilen stehen
- Der Kopf einer Zeile muss mindestens eine Stelle weiter rechts stehen als der Kopf der Zeile darüber
- Alle Einträge unterhalb eines Kopfes müssen Null sein

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Anwendung Gauß Algorithmus

$$i : x_1 - 2x_2 + x_4 = 0$$

$$ii : -x_2 + 3x_3 - x_4 = 10$$

$$iii : 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -13$$

$$iv : x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -6$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & \mathbf{0} & 16 & -9 & 57 \\ 0 & \mathbf{0} & 7 & -3 & 24 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{7}{16} iii \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 2 & 3 & -5 & 0 & -13 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -6 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} \\ -2i \\ -i \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ \mathbf{0} & 7 & -5 & -2 & -13 \\ \mathbf{0} & 3 & -2 & 0 & -6 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} \\ +7ii \\ +3ii \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 57 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \frac{15}{16} & -\frac{15}{16} \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} \\ \cdot (\frac{16}{15}) \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 57 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array} \right)$$

Gauß Algorithmus: Rangbestimmung

Rang der Matrix = Anzahl der Zeilen ungleich Null
= Anzahl der Leitkoeffizienten

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(A) = 4$$

Gauß Algorithmus: Lösbarkeit/Anzahl Lösungen

A..... Koeffizientenmatrix

E..... erweiterte Koeffizientenmatrix

$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(E) = \text{voller Rang} \Leftrightarrow \text{eindeutige Lösung}$

$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(E) < \text{voller Rang} \Leftrightarrow \text{unendlich viele Lösungen}$

$\text{Rang}(A) < \text{Rang}(E) \Leftrightarrow \text{keine Lösung}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & g \\ 0 & d & e & h \\ 0 & 0 & f & i \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & f \\ 0 & d & e & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & f \\ 0 & d & e & g \\ 0 & 0 & 0 & h \end{array} \right)$$

Gauß Algorithmus: Lösungen

Inhomogenes Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 57 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = -1, x_3 = 3, x_2 = 0, x_1 = 1$$

Homogenes Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 0, x_3 = 0, x_2 = 0, x_1 = 0$$

Ein weiteres Beispiel

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- Rang

- 3 Köpfe

⇒ **Rang(A) = 3**

- Lösbarkeit

- Rang (A) = 3
 - Rang (E) = 3
 - voller Rang = 4

⇒ **unendlich viele
Lösungen**

- Lösungen

- $x_4 = 1$

- $x_3 = \lambda$

... beliebiger Parameter

- $x_2 = 5 - 3\lambda$

- $x_1 = 9 - 6\lambda$

- Darstellung in Parameterform:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauß Jordan Inversion

Gauß Jordan Inversion

Wandelt man eine invertierbare $n \times n$ -Matrix A mit elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix um, so entsteht die zu A inverse Matrix A^{-1} , wenn man diese Umformungen in der gleichen Reihenfolge auf die Einheitsmatrix I anwendet.

Beispiel: Gauß Jordan Inversion

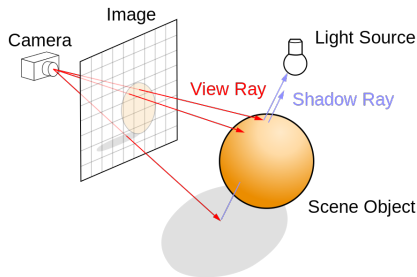
A			I			
1	0	0	1	0	0	
1	0	1	0	1	0	-i
0	1	3	0	0	1	
1	0	0	1	0	0	
0	0	1	-1	1	0	
0	1	3	0	0	1	-3 ii
1	0	0	1	0	0	
0	0	1	-1	1	0	↓
0	1	0	3	-3	1	↑
1	0	0	1	0	0	
0	1	0	3	-3	1	
0	0	1	-1	1	0	
I			A ⁻¹			

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Anwendung: Ray Tracing, Teil 1

Strahlenverfolgung für die Darstellung von räumlichen Objekten auf dem Bildschirm; jeder Objektpunkt wird durch eine Zentralprojektion (Zentrum = Auge des Beobachters) auf die Darstellungsebene projiziert



Aufgabenstellung: Erster Schnittpunkt des Strahls mit einem Objekt

Oft: komplexe Objekte durch ebene Polygone begrenzt

⇒ Bestimme den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene

Anwendung: Ray Tracing, Teil 1

Ebenengleichung: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

Geradengleichung: $g = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}_{\text{Zentrum}} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{\text{Richtung}} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Gleichungssystem:

$$i : x_1 = u_1 + \lambda v_1$$

$$ii : x_2 = u_2 + \lambda v_2$$

$$iii : x_3 = u_3 + \lambda v_3$$

$$iv : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -v_1 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & -v_2 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & -v_3 & u_3 \\ a & b & c & 0 & d \end{array} \right)$$

Alternativ: ...

Wurde ein Schnittpunkt gefunden, muss noch ermittelt werden, ob dieser innerhalb oder außerhalb des Polygons liegt → Teil 2 (später)

Geometrische Interpretation linearer Gleichungssysteme

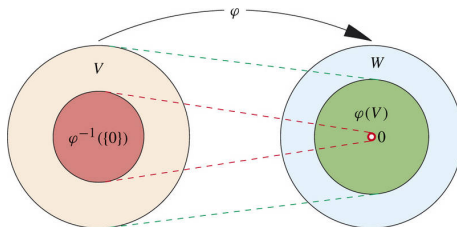
- Lösung eines *homogenen* Gleichungssystems ist ein Vektorraum (Unterraum)
 - Der Nullpunkt (0-dimensional)
 - Eine Ursprungsgerade (1-dimensional)
 - Eine Ursprungsebene (2-dimensional)
 - ...
- Lösung eines *inhomogenen* Gleichungssystems ist im allgemeinen *kein* Unterraum
 - Aus dem Nullpunkt verschobene Punkte, Geraden, Ebenen oder Räume höherer Dimension

Wiederholung Kern und Bild

Jede lineare Abbildung $\phi : V \rightarrow W$ hat einen **Kern**. Er ergibt sich aus der Lösung des homogenen Gleichungssystems und ist dadurch ein Untervektorraum des Urbildes V . Der Kern einer Abbildung ist die Urbildmenge des Nullvektors aus W , d.h. die Menge aller Vektoren aus V , die auf $0 \in W$ abgebildet werden.

Das **Bild** der linearen Abbildung ist die Gesamtheit der Vektoren aus W , die durch die Abbildung ϕ getroffen werden. Das Bild der Abbildung enthält also den Kern.

Da bei jeder linearen Abbildung gelten muss $\phi(0) = 0$, ist ihr Kern (und somit auch ihr Bild) niemals leer.



Aus: Arens et al., *Mathematik*, ISBN: 978-3-8274-2347-4
© Spektrum Akademischer Verlag 2012

Wiederholung Rangsatz

Rangsatz

Seien U, V Vektorräume, $\dim U = n$ und $f : U \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

$$\dim(U) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

Beweisskizze.

Man wählt eine Basis des Kerns, diese kann man zu einer Basis von U ergänzen. Dann zeigt man, dass die Bilder dieser Ergänzung gerade eine Basis des Bildraums darstellen. ■

Geometrische Interpretation linearer Gleichungssysteme

Satz

$$\dim(\text{Lös}(A,0)) = \text{Anzahl der Unbekannten} - \text{Rang}(A)$$

Beweis.

Wir wissen schon:

Rang der Matrix A	=	Dimension von $\text{Im}(A)$
Anzahl der Unbekannten	=	Dimension des Urbildraums
Dimension des Lösungsraums	=	Dimension von $\text{Ker}(A)$

Wegen des Rangsatzes gilt $\dim(\text{Im}(A)) + \dim(\text{Ker}(A)) = \dim(\text{Urbildraum})$. Daraus folgt direkt die Aussage. ■

Ein Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\text{Rang}(A) = 2$
- 3 Unbekannte $\Rightarrow \dim(\text{Ker}(A)) = 1 \Rightarrow \text{Lös}(A, 0)$ ist eine Gerade
- $(1, 1, 0)^\top \in \text{Lös}(A, 0) \Rightarrow \text{Ker}(A) = \{\lambda(1, 1, 0)^\top \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
- $(0, 0, 1)^\top \in \text{Lös}(A, b) \Rightarrow \text{Lös}(A, b)$ ist die Gerade

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

