# VO 050041:

# Technische Grundlagen der Informatik

Begleitende Folien zur Vorlesung

Wintersemester 2016/17

Vortragende: Peter Reichl, Andreas Janecek

Zuletzt aktualisiert: 4. November 2016

# Teil 3:

# Grundlagen der Aussagenlogik

# Überblick

# Literatur

- Informatik (Blieberger, Springer-Verlag): Kapitel 11

# Überblick

# Boole'sche Algebra

Boole'sche Algebra

- Grundlage für digitale Schaltungen
- Kennt nur zwei Werte:
  1. **Wahre Aussage**
  2. **Falsche Aussage**
- George Boole, 1847 (!)

# Aussagenlogik

Wahrheitswerte

| **Wahr** | **Falsch** |
|---|---|
| W (wahr) | F (falsch) |
| T (true) | F (false) |
| H (high) | L (low) |
| 1 (Bit gesetzt) | 0 (Bit nicht gesetzt) |

# Operatoren

## Unäre Operationen

- Negation („nicht“, „NOT“): $\neg$

## Binäre Operationen

- Konjunktion („und“, „AND“): $\wedge$
- Disjunktion („inklusives oder“, „OR“): $\vee$
- Implikation[a]: $\Rightarrow$
- Äquivalenz: $\Leftrightarrow$

[a] VORSICHT: die Implikation (auch materiale Implikation, Subjunktion, Konditional genannt) drückt eine hinreichende Bedingung aus, aber keine Kausalität!

# Wahrheitswerte

## Wahrheitswerte

| $\mathbf{a}$ | $\mathbf{b}$ | $\neg\mathbf{a}$ | $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ | $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ | $\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b}$ | $\mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

## Ordnungsrelation (Operatorrangfolge)

1. $\neg$
2. $\wedge$
3. $\vee$

# Axiome und Gesetze

**Kommutativität**

- $a \wedge b = b \wedge a$
- $a \vee b = b \vee a$

**Distributivität**

- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

# Axiome und Gesetze

**Verknüpfung mit 1 bzw. 0**

- $a \wedge 1 = a$
- $a \vee 0 = a$

**Komplementäres Element**

- $a \wedge \neg a = 0$
- $a \vee \neg a = 1$

# Axiome und Gesetze

## Assoziativität

- $(a \land b) \land c = a \land (b \land c)$
- $(a \lor b) \lor c = a \lor (b \lor c)$

## Absorption

- $(a \land b) \lor a = a$
- $(a \lor b) \land a = a$

## Auslöschung

- $a \land (b \lor \neg b) = a$
- $a \lor (b \land \neg b) = a$

# Axiome und Gesetze

## Idempotenz

- $a \wedge a = a$
- $a \vee a = a$

## Involutivität

- $\neg(\neg a) = a$

## De Morgansche Regel

- $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$
- $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$

# Tautologie, Antilogie

Tautologie, Antilogie

- Tautologie: Ausdruck, der für jede Belegung **wahr** ist
- Antilogie (Kontradiktion): Ausdruck, der für jede Belegung **falsch** ist

# Tautologie

Beispiel: $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \Rightarrow \mathbf{a}$

| $\mathbf{a}$ | $\mathbf{b}$ | $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ | $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \Rightarrow \mathbf{a}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

# Antilogie (Kontradiktion)

Beispiel: $\mathbf{f} = [\neg\mathbf{a} \vee (\neg\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})] \wedge \mathbf{a}$

| $\mathbf{a}$ | $\mathbf{b}$ | $\neg\mathbf{a}$ | $(\neg\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ | $\neg\mathbf{a} \vee (\neg\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ | f |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

# Überblick

# Normalformen

Normalformen

- Verschiedene Formen der Darstellung von logischen Aussagen möglich
- **Normierte Darstellung sinnvoll**
- **Disjunktive Normalform**
- **Konjunktive Normalform**
- **Kommen mit AND, OR, NOT aus** $\Rightarrow$ wir müssen nicht alle logischen Operationen in Hardware implementieren!

# Disjunktive Normalform (DNF)

DNF

- **Vollkonjunktionen werden disjunktiv verknüpft**
- Vollkonjunktionen = alle Variablen sind konjunktiv verknüpft

$\Rightarrow$ Variablen können negiert sein

- Beispiel: $f(e_1, e_2, e_3) = (e_1 \Rightarrow e_2) \wedge (\neg e_1 \Leftrightarrow e_3)$

# Beispiel DNF

1.: Wahrheitstabelle

| # | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_1 \Rightarrow e_2$ | $\neg e_1 \Leftrightarrow e_3$ | $(e_1 \Rightarrow e_2) \wedge (\neg e_1 \Leftrightarrow e_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

# Beispiel DNF

2.: Zeilen auswählen, Vollkonjunktionen bilden

- Auswahl der Zeilen mit **wahrem** Ergebnis (= 1)
  - Zeile 2
  - Zeile 4
  - Zeile 7
- Variablen mit Wert 0 negieren, andere direkt übernehmen, und alle konjunktiv verbinden
- $\neg e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3$, $\neg e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$, $e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3$

3.: Disjunktive Normalform

Einzelne „Zeilen“ disjunktiv verbinden.

$$(\neg e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3) \vee (\neg e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \vee (e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3)$$

# Beispiel DNF

## Vergleich

$$(\neg e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3) \vee (\neg e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \vee (e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3)$$

| # | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_1 \Rightarrow e_2$ | $\neg e_1 \Leftrightarrow e_3$ | $(e_1 \Rightarrow e_2) \wedge (\neg e_1 \Leftrightarrow e_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

# Konjunktive Normalform (KNF)

KNF

- **Volldisjunktionen werden konjunktiv verknüpft**
- Volldisjunktionen = alle Variablen sind disjunktiv verknüpft
- Beispiel: $f(e_1, e_2, e_3) = (e_1 \wedge e_2) \vee e_3$

# Beispiel KNF

1.: Wahrheitstabelle

| # | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_1 \wedge e_2$ | $(e_1 \wedge e_2) \vee e_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# Beispiel KNF

2.: Zeilen auswählen

- Auswahl der Zeilen mit **falschem** Ergebnis (= 0):
  - Zeile 1
  - Zeile 3
  - Zeile 5
- Variablen mit Wert 1 negieren, andere direkt übernehmen, und alle disjunktiv verbinden

3.: Konjunktive Normalform

Einzelne „Zeilen“ konjunktiv verbinden.

$$(e_1 \vee e_2 \vee e_3) \wedge (e_1 \vee \neg e_2 \vee e_3) \wedge (\neg e_1 \vee e_2 \vee e_3)$$

# Beispiel KNF

## Vergleich

$$(e_1 \vee e_2 \vee e_3) \wedge (e_1 \vee \neg e_2 \vee e_3) \wedge (\neg e_1 \vee e_2 \vee e_3)$$

| # | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_1 \wedge e_2$ | $(e_1 \wedge e_2) \vee e_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# Überblick

# Verfahren nach Quine und McCluskey

Verfahren nach Quine und McCluskey

- **Verfahren zum Vereinfachen von Funktionen**
- Irrelevante Variablen aus Normalform eliminieren
- Geht von **DNF** aus
- Gezielt Terme der Art $(x \vee \neg x)$ erzeugen
- $\Rightarrow$ Entsprechen 1. Fallen weg, wenn sie in einer Konjunktion vorkommen
- Weitere Schritte (hier nicht angeführt, bei Interesse siehe Literatur)

# Verfahren nach Quine und McCluskey

**Das Prinzip**

$$(e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge \underline{e_4}) \vee (e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge \underline{\neg e_4}) =$$

$$(\underline{(e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3)} \wedge e_4) \vee (\underline{(e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3)} \wedge \neg e_4) \overset{Distr.Ges.}{=}$$

$$\underline{(e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3)} \wedge (e_4 \vee \neg e_4) \overset{AxiomKompl.El.}{=}$$

$$\underline{(e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3)} \wedge 1 =$$

$$(\mathbf{e_1} \wedge \neg \mathbf{e_2} \wedge \mathbf{e_3})$$

# KV-Diagramme

KV-Diagramme

- **Graphische Veranschaulichung des Verfahrens von Quine und McCluskey**
- Karnaugh und Veitch
- Für maximal 4 Variablen sinnvoll anwendbar
- **Geschickte graphische Darstellung: Terme, die nach Quine/McCluskey zusammengefasst werden können, sind im KV-Diagramm direkt benachbart!**
- $2^n$ Felder bei $n$ Eingangsvariablen

# Prinzip

**Jedes Feld entspricht einer Vollkonjunktion der DNF!**

| | $e_1$ | $\neg e_1$ |
|---|---|---|
| $e_2$ | $e_1 \wedge e_2$ | $\neg e_1 \wedge e_2$ |
| $\neg e_2$ | $e_1 \wedge \neg e_2$ | $\neg e_1 \wedge \neg e_2$ |

Abbildung: KV Diagramm für zwei Variablen

# Simples Beispiel

$$X = e_1 \land \neg e_2 \land e_3 \land \neg e_4$$

| | $\neg e_3$ | $e_3$ | $e_3$ | $\neg e_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\neg e_1$ | | | | | $\neg e_2$ |
| $e_1$ | | | X | | $\neg e_2$ |
| $e_1$ | | | | | $e_2$ |
| $\neg e_1$ | | | | | $e_2$ |
| | $e_4$ | $e_4$ | $\neg e_4$ | $\neg e_4$ | |

Abbildung: KV Diagramm für vier Variablen

# Vorgehensweise

**Vorgehensweise**

1. **Von DNF ausgehen** (z.B. )
2. **Für jede in der DNF vorkommende Vollkonjunktion im KV-Diagramm Einser im entsprechendem Feld eintragen**
3. **Zusammenfassen möglichst vieler 1er in benachbarten[a] Feldern zu Blöcken**
4. **Zusammengefasste Blöcke entsprechen den Vollkonjunktionen der neuen, minimierten DNF**

[a] auch außen herum!

# Zweierblöcke

| | $\neg e_3$ | $e_3$ | $e_3$ | $\neg e_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\neg e_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\neg e_2$ |
| $e_1$ | 0 | 1 | 1 | 0 | $\neg e_2$ |
| $e_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $e_2$ |
| $\neg e_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $e_2$ |
| | $e_4$ | $e_4$ | $\neg e_4$ | $\neg e_4$ | |

Abbildung: $e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3$

# Zweierblöcke

| | $\neg e_3$ | $e_3$ | $e_3$ | $\neg e_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\neg e_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\neg e_2$ |
| $e_1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $\neg e_2$ |
| $e_1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $e_2$ |
| $\neg e_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $e_2$ |
| | $e_4$ | $e_4$ | $\neg e_4$ | $\neg e_4$ | |

Abbildung: $e_1 \wedge \neg e_3 \wedge \neg e_4$

# Zweierblöcke

| | $\neg e_3$ | $e_3$ | $e_3$ | $\neg e_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\neg e_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $\neg e_2$ |
| $e_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\neg e_2$ |
| $e_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $e_2$ |
| $\neg e_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $e_2$ |
| | $e_4$ | $e_4$ | $\neg e_4$ | $\neg e_4$ | |

Abbildung: $\neg e_1 \wedge \neg e_3 \wedge e_4$

# Viererblöcke

| | $\neg e_3$ | $e_3$ | $e_3$ | $\neg e_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\neg e_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 | $\neg e_2$ |
| $e_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 | $\neg e_2$ |
| $e_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $e_2$ |
| $\neg e_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $e_2$ |
| | $e_4$ | $e_4$ | $\neg e_4$ | $\neg e_4$ | |

Abbildung: $\neg e_2 \wedge e_4$

# Viererblöcke

| | $\neg e_3$ | $e_3$ | $e_3$ | $\neg e_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\neg e_1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $\neg e_2$ |
| $e_1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $\neg e_2$ |
| $e_1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $e_2$ |
| $\neg e_1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $e_2$ |
| | $e_4$ | $e_4$ | $\neg e_4$ | $\neg e_4$ | |

Abbildung: $\neg e_3 \wedge \neg e_4$

# Viererblöcke

| | $\neg e_3$ | $e_3$ | $e_3$ | $\neg e_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\neg e_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | $\neg e_2$ |
| $e_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\neg e_2$ |
| $e_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $e_2$ |
| $\neg e_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | $e_2$ |
| | $e_4$ | $e_4$ | $\neg e_4$ | $\neg e_4$ | |

Abbildung: $\neg e_1 \wedge \neg e_3$

# Achterblöcke

| | $\neg e_3$ | $e_3$ | $e_3$ | $\neg e_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\neg e_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | $\neg e_2$ |
| $e_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | $\neg e_2$ |
| $e_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $e_2$ |
| $\neg e_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $e_2$ |
| | $e_4$ | $e_4$ | $\neg e_4$ | $\neg e_4$ | |

Abbildung: $\neg e_2$

# Beispiel

$$f(e_1, e_2, e_3, e_4) = (e_1 \wedge \neg e_2 \wedge \neg e_3 \wedge e_4) \vee (e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \vee (e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3 \wedge e_4) \vee (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \vee (e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3 \wedge \neg e_4)$$

| | $\neg e_3$ | $e_3$ | $e_3$ | $\neg e_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\neg e_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\neg e_2$ |
| $e_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 | $\neg e_2$ |
| $e_1$ | 1 | 1 | 0 | 1 | $e_2$ |
| $\neg e_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $e_2$ |
| | $e_4$ | $e_4$ | $\neg e_4$ | $\neg e_4$ | |

Minimiert: $(e_1 \wedge e_4) \vee (e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3)$

# Überblick

# Literatur

- Informatik (Blieberger, Springer-Verlag): Kapitel 12
- alle Abbildungen hieraus entnommen

# Fuzzy Logic

## Fuzzy Logic

- Bisher: Boole'sche Algebra $\rightarrow$ zwei Wahrheitswerte
- Aber: reale Welt $\rightarrow$ nicht-exakte/unvollständige Datensätze
- Lotfi A. Zadeh (1965): Fuzzy Logik
- Idee: ersetze Zweiwertigkeit $\{0, 1\}$ durch Intervall $[0, 1]$
- Anwendungsbereich: Regelungstechnik (Fuzzy Control)
  $\rightarrow$ oft keine mathematisches Prozessmodell möglich
  $\rightarrow$ stattdessen alltagssprachliche/linguistische Zustandsbeschreibung
- Beispiel Temperatur: sehr kalt / kalt / kühl / warm / sehr warm / heiß / sehr heiß

## Fuzzy-Mengen

- Fuzzy-Menge: normierte Zugehörigkeitsfunktion mit beliebigen Werten zwischen 0 und 1
- Also: statt „Element x ist in Menge A enthalten oder nicht" jetzt Zugehörigkeitsmaß $\mu_A(x)$

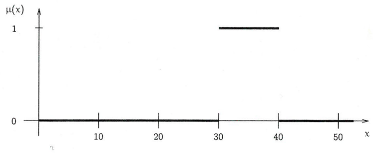

Abbildung 12.1: Zugehörigkeitsfunktion einer scharfen Menge

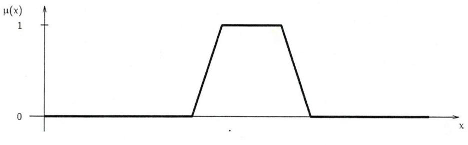

Abbildung 12.2: Zugehörigkeitsfunktion einer unscharfen Menge

## Fuzzy-Mengen

- Betrachte Zugehörigkeitsfunktion $\mu_A(x)$
- Mengen-Operationen (Durchschnitt, Vereinigung, Komplement) neu definiert:
  - $(A \cup B) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$
  - $(A \cap B) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$
  - $\overline{A}(x) = 1 - \mu_A(x)$
- Beobachtung: bisherige (zweiwertige) Logik als Spezialfall enthalten
  $\rightarrow$ Fuzzy Logic als Erweiterung der Boole'schen Algebra!

## Fuzzyfizierung

- Idee: Zugehörigkeitsfunktion für jede Kategorie
- können unterschiedlich aussehen
- typische Form: stückweise linear
- Normierung: Summe der Zugehörigkeitsmaße für jeden scharfen Wert = 1

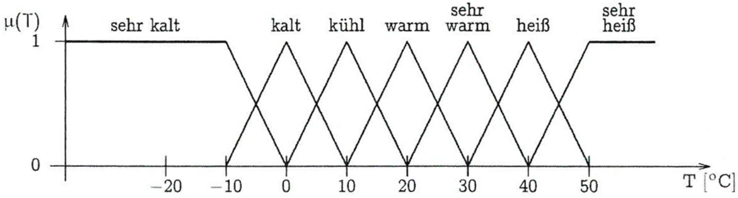


Abbildung 12.3: Zugehörigkeitsfunktionen $\mu(T)$

## Fuzzy-Operatoren

- Idee: Verknüpfung von Fuzzy-Sets ein und derselben Grundmenge
- OR-Verknüpfung: Maximum-Operator
  $A \text{ OR } B \equiv A \cup B \equiv \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$ mit $x \in X$

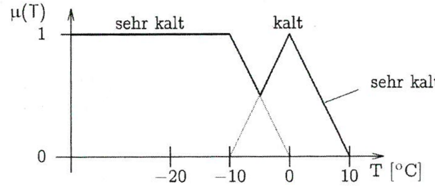


Abbildung 12.5: OR-Verknüpfung durch Maximum-Operator

## Fuzzy-Operatoren

- AND-Verknüpfung: Minimum-Operator
  $A \texttt{ AND } B \equiv A \cap B \equiv \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ mit $x \in X$
- Komplement: $\texttt{NOT} A \equiv 1 - \mu_A(x)$ mit $x \in X$
- Kommutativ- und Assoziativgesetz weiterhin gültig!

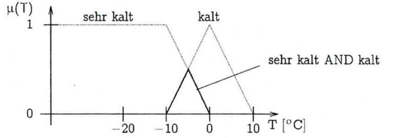


Abbildung 12.6: AND-Verknüpfung durch Minimum-Operator

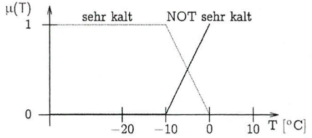


Abbildung 12.7: NOT-Verknüpfung mittels Komplement

## Fuzzy-Relationen

- Bisher: Fuzzy-Sets auf gleicher Grundmenge
- Wanted: Implikation $\rightarrow$ `IF` $p$ `THEN` $c$
- Prämisse $p$ durch Fuzzy-Set $X_1$, Conclusio $c$ durch Fuzzy-Set $X_2$ beschrieben
- Idee: Kartesisches Produkt $X = X_1 \times X_2$
- Ergebnis: Fuzzy-Relation $\mu_R(x_1, x_2) : X_1 \times X_2 \rightarrow [0, 1]$
- Zugehörige Operatoren abhängig vom Anwendungsfall, z.B.
  - Minimum-Operator: $\mu_{min}(x_1, x_2) = \min\{\mu_1(x_1), \mu_2(x_2)\}$
  - Produkt-Operator: $\mu_{prod}(x_1, x_2) = \mu_1(x_1) \cdot \mu_2(x_2)$

### Regelbasis

- Idee: Beschreibe Produktionsregeln $R_1$, $R_2$ usw. als Fuzzy-Relationen
  $R_k$ : `IF` $p_k$ `THEN` $c_k$
- Beispiel: Temperaturregler
  `IF` (*Temperatur* = heiß `AND` *Gradient* = hoch) `OR`
  *Temperatur* = sehr heiß
  `THEN` *Ventilstellung* = ganz zu
- Regelbasis endlicher Größe
- keine Lösung von Differentialgleichungen etc. notwendig

### Inferenz

- Inferenz = Auswertung der Regeln plus Zusammenfassung der Handlungsanweisungen $\rightarrow$ Entscheidungsstrategie
- Schritt 1: Ermittlung der aktiven Regeln (Prämissen mit Erfüllheitsgrad $> 0$)
- Schritt 2a: Ermittlung der einzelnen Ausgangs-Fuzzymengen
- Schritt 2b: Wahrheitswert jeder aktiven Regel = Maß, in dem die Regel "feuert"
- Schritt 3: Ermittlung der resultierenden Ausgangs-Fuzzymenge

## Inferenz

- Strategie 1: MAX-MIN Inferenz
  - `OR` $\rightarrow$ max
  - `AND` $\rightarrow$ min
  - Implikation $\rightarrow$ min
- Strategie 2: MAX-PROD Inferenz
  - `OR` $\rightarrow$ max
  - `AND` $\rightarrow$ min
  - Implikation $\rightarrow \cdot$

## MAX-MIN Inferenz vs MAX-PROD Inferenz

- Strategie 1: MAX-MIN Inferenz
  - OR $\rightarrow$ max
  - AND $\rightarrow$ min
  - Implikation $\rightarrow$ min
- Strategie 2: MAX-PROD Inferenz
  - OR $\rightarrow$ max
  - AND $\rightarrow$ min
  - Implikation $\rightarrow \cdot$

## Beispiel

- Annahme: Temperatur = 10°C, Temperaturabfall $\delta$ = 2°C/min
- Aktive Regel 1: IF T = kalt AND $\delta$ = negativ THEN $\xi$ = mittel
- Aktive Regel 2: IF T = sehr kalt OR $\delta$ = null THEN $\xi$ = offen

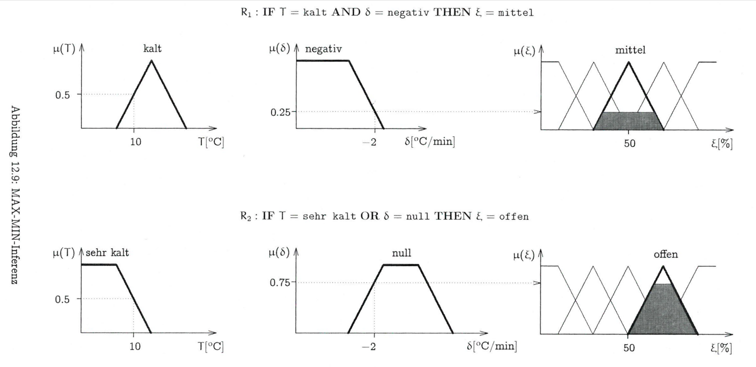


Abbildung: MAX-MIN Inferenz

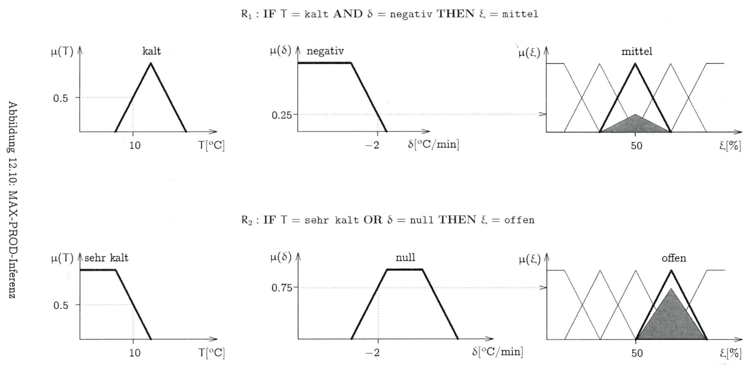


Abbildung: MAX-PROD Inferenz

## Inferenz: Ergebnis

- Beachte: einzelne Ausgangsmengen ergeben sich
  - bei MAX-MIN Inferenz durch den Minimumoperator (aus Prämissen) angewandt auf Conclusio
    → Zugehörigkeitsmaß wird oben “abgeschnitten”
  - bei MAX-PROD Inferenz durch den Produktoperator
    → Zugehörigkeitsmaß wird gleichmäßig “gestaucht”

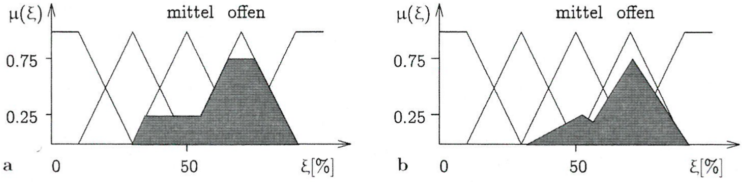


Abbildung 12.11: Ausgangsmenge bei MAX-MIN-Inferenz (a) und MAX-PROD-Inferenz (b)

## Defuzzifizierung

- Letzter Schritt: Ermittlung eines scharfen Wertes aus dem unscharfen Ergebnis
- Mehrere Methoden
  - Maximum Height (maximale Höhe): Ausgangsgröße aus maximalem Wert der Ausgangsmenge
  - Mean of Maximum (Maximum-Mittelwert): arithmetisches Mittel aller Werte, für die die Zugehörigkeitsfunktion maximal ist
  - Center of Gravity (Schwerpunktmethode): x-Wert des Flächenschwerpunkts

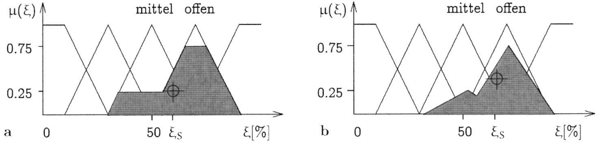


Abbildung 12.12: Scharfer Wert für MAX-MIN-Inferenz (a) und MAX-PROD-Inferenz (b)