Mathematische Grundlagen der Informatik

Graphentheorie

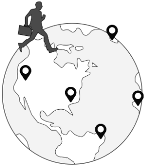
W. Gansterer, C. Plant

30. November 2016

Graphentheorie

Herausforderungen im Alltag der Informatik

- Routing im Internet
- Reiserouten planen
- Kommunikationsnetzwerke
- Compiler und Syntaxbäume
- ...

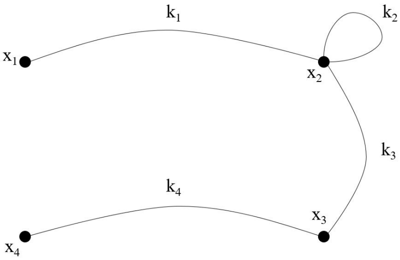


Inhaltsverzeichnis I

Ungerichtete Graphen

Definition

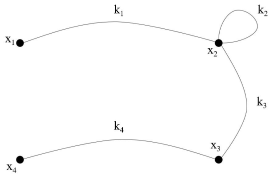
Ein (ungerichteter) Graph G besteht aus einer Menge $V = V(G)$, den Knoten von G, und aus einer Menge $E = E(G)$ von ungeordneten Paaren k=[x,y] mit $x, y \in V$, den Kanten von G. Man schreibt $G(V, E)$.



$$V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$
$$E = \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$$
$$k_1 = [x_1, x_2]$$
$$k_2 = [x_2, x_2]$$
$$k_3 = [x_2, x_3]$$
$$k_4 = [x_3, x_4]$$

Grundbegriffe

- Ist $k = [x, y]$ eine Kante, so heißen x und y **Endpunkte** der Kante
- x und y sind **inzident** zu k
- x und y sind **adjazent** (benachbart)
- Die Kante $k = [x, y]$ heißt **Schlinge**, wenn $x = y$
- $G' = (V', E')$ heißt **Teilgraph** von G, wenn $V' \subset V$ und $E' \subset E$
- G heißt **schlichter Graph**, wenn er weder Schlingen noch Mehrfachkanten hat

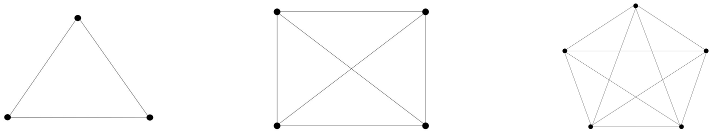


x_1 und x_2 sind adjazent
x_3 und x_4 sind Endpunkte von k_4
x_3 und x_4 sind inzident zu k_4
k_2 ist eine Schlinge

Vollständige Graphen

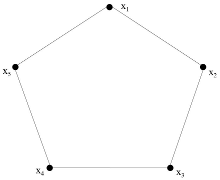
G heißt **vollständiger Graph**, wenn G ein schlichter Graph ist, in dem jedes Knotenpaar durch genau eine Kante verbunden ist.

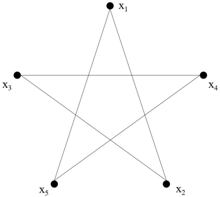
Ein vollständiger Graph mit n Knoten hat $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ Kanten



Graphische Darstellung von Graphen

Zu jedem Graphen gibt es unendlich viele graphische Darstellungen.





Schneiden sich die Kanten nur in den Knoten, so bezeichnet man die Darstellung als **geometrischer Graph**. Jeder endliche Graph besitzt eine Realisierung als geometrischer Graph im $\mathbb{R}^3$.

Graphen, die sich sogar im $\mathbb{R}^2$ überschneidungsfrei darstellen lassen, heißen **planare Graphen**.

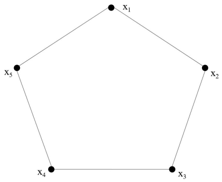
Isomorphe Graphen

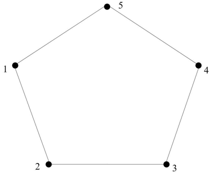
Zwei Graphen werden als „gleich“ angesehen, wenn sie sich nur in der Bezeichnung ihrer Knoten unterscheiden:

Definition

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $\phi : V \to V'$ gibt, sodass gilt:

$$[x, y] \in E \Leftrightarrow [\phi(x), \phi(y)] \in E'$$

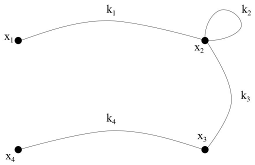




Darstellung - Adjazenzmatrix

Darstellung in Matrizenform (leicht für Computer zu verarbeiten!)

- Die Knoten werden durchnummeriert, jede Zeile/Spalte entspricht einem Knoten
- Der Eintrag der Matrix an der Stelle a_{ij} entspricht der Anzahl der Kanten zwischen den Knoten i und j. Sind die Knoten nicht adjazent, hat der Eintrag den Wert 0.
- Befindet sich im k-ten Knoten eine Schlinge, so wird an der entsprechenden Stelle auf der Diagonale eine 1 eingetragen.
- Bei *ungerichteten* Graphen ist die Adjazenzmatrix stets symmetrisch.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Grad

Definition

Ist x ein Knoten des Graphen G, so heißt die Anzahl der mit x inzidenten Kanten Grad von x. Dabei zählen Schlingen doppelt. Der Grad von x wird mit $d(x)$ bezeichnet.

Satz

In jedem Graphen $G = (V, E)$ gilt $\sum d(x) = 2 \cdot |E|$, also die Summe der Grade entspricht der doppelten Anzahl der Kanten im Graphen, sie ist also immer gerade.

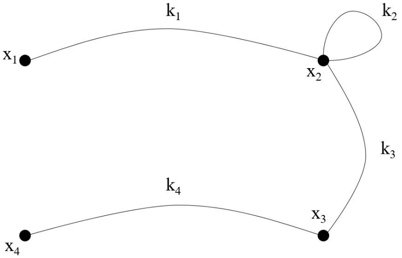
Folgerung: Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad ist gerade.

Beachten Sie:

Der Grad des Knotens x_n entspricht der Summer der Einträge der n-ten Zeile (bzw. Spalte) der dazugehörigen Adjazenzmatrix.

(*Achtung:* Schlingen doppelt zählen!)

Beispiel: Grad



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$d(x_1) = 1$
$d(x_2) = 4$
$d(x_3) = 2$
$d(x_4) = 1$

Wege in Graphen

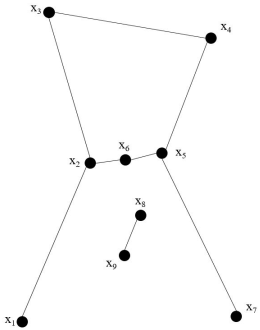
- Eine Menge von Kanten, die den Knoten x_1 mit x_n verbindet, heißt **Kantenfolge** von x_1 nach x_n
- Eine Kantenfolge heißt **offen**, wenn $x_1 \neq x_n$ und **geschlossen**, wenn $x_1 = x_n$

- Ein **Weg** von x nach y ist eine offene Kantenfolge, in der alle Knoten verschieden sind
- Ein **Kreis** ist eine geschlossene Kantenfolge, in der bis auf Anfangs- und Endknoten alle Knoten verschieden sind

- Der Knoten x heißt **erreichbar** vom Knoten y, wenn es einen Weg von x nach y gibt.
- Ein (ungerichteter) Graph heißt **zusammenhängend**, wenn jeder Knoten von jedem erreichbar ist.

Beispiele

- $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_2x_1$ ist eine geschlossene Kantenfolge
- $x_1x_2x_6x_5x_7$ ist ein Weg
- $x_2x_3x_4x_5x_6x_2$ ist ein Kreis
- Der Graph ist nicht zusammenhängend, die Teilgraphen $x_1, x_2, ..., x_7$ und x_8, x_9 sind die **Zusammenhangskomponenten** des Graphen



Länge und Gewicht

Definition

Die Anzahl der Kanten einer Kantenfolge oder eines Weges heiße **Länge** der Kantenfolge bzw. des Weges.

Definition

Ein Graph heißt **bewertet / gewichtet**, wenn jeder Kante $[x, y]$ ein **Gewicht** $w(x, y) \in \mathbb{R}$ zugeordnet ist. In bewerteten Graphen ist die *Länge eines Weges* von einem Knoten zu einem anderen die Summe der Gewichte aller Kanten des Weges.

Bäume

Bäume

Definition

Ein Graph, in dem je zwei Knoten durch genau einen Weg verbunden sind, heißt **Baum**. Ein Baum ist also ein zusammenhängender Graph ohne Kreise.