Universität Wien
Fakultät für Informatik
Prof. Wilfried Gansterer, Prof. Claudia Plant

Mathematische Grundlagen der Informatik 1
WiSe 2016/17

Übungsblatt 5: Matrizen und Lineare Algebra I

Matrizen

Aufgabe 5-1

Gegeben seien folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 8 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 9 \\ 11 & 7 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Nennen Sie alle Matrizenmultiplikationen, die mit jeweils maximal zwei dieser drei Matrizen möglich sind.

(b) Führen Sie diese durch.

(c) Können Sie mit diesen Matrizen auch zwei Matrizenmultiplikationen hintereinander ausführen? Falls ja, nennen Sie zwei Beispiele.

Aufgabe 5-2

(a) Welche lineare Abbildung ist durch die Matrix C aus Aufgabe 5-1 definiert?

(b) Wie lauten die einzelnen Gleichungen der Gleichungssysteme $Ax = e$ bzw. $Bx = f$ (A und B sind wieder die Matrizen aus Aufgabe 5-1)? Welche Dimensionen haben die Vektoren e bzw. f?

(c) Bestimmen Sie den Rang der drei Matrizen aus Aufgabe 5-1.

Aufgabe 5-3

Gegeben sei folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} r+s+2t &= 1 \\ 2r-s &= -2 \\ r-s-t &= 4 \end{aligned}$$

(a) Ermitteln Sie die Matrix A sowie den Ergebnisvektor b, damit $Ax = b$ dieses Gleichungssystem repräsentiert.

(b) Welchen Rang hat die Matrix bzw. die erweiterte Matrix dieses Systems?

(c) Ist dieses Gleichungssystem lösbar? Welche Dimension hat der Lösungsraum?

(d) Lösen Sie dieses System mittels Gauß'schem Eliminationsverfahren.

Aufgabe 5-4

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Ermitteln Sie U^{-1}.

(b) Welche Eigenschaften muss eine Matrix haben, damit man sie invertieren kann? Geben Sie eine 3×3-Matrix an, die nicht invertierbar ist.

Aufgabe 5-5

Gegeben sei folgende Matrix:

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, a_{ii} \in \mathbb{R}$$

(a) Ist diese Matrix invertierbar?

(b) Geben sie gegebenenfalls die Inverse G^{-1} an.

Aufgabe 5-6

Gegeben sei folgende lineare Abbildung:

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 + x_2 \\ x_2 + 4 \cdot x_3 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie den Kern dieser Abbildung.

(b) Welche Dimension hat $Ker(H)$? Können Sie daraus direkt auf den Rang von H schließen?

Aufgabe 5-7

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix in Abhängigkeit von t:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 2t & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5-8

Betrachten Sie folgende erweiterte Koeffizientenmatrizen, die bereits in reduzierter Stufenform vorliegen:

$$K = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right), L = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), N = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sind die zugrunde liegenden Gleichungssysteme lösbar? Falls ja, geben Sie jeweils die Lösung an.