Universität Wien
Institut für Informatik
Prof. Wilfried Gansterer, Prof. Claudia Plant

Mathematische Grundlagen der Informatik 1

WiSe 2016/17

Übungsblatt 4: Vektorräume

Aufgabe 4-1

Es sei die Vektormenge $\{u, v, w\}$ linear unabhängig in $\Re^n$.

(a) ist die Vektormenge $\{u, v\}$ linear unabhängig?

(b) ist die Vektormenge $\{3u + 2v, v, u + v + w\}$ linear unabhängig?

Aufgabe 4-2

Sei $f : X \to Y$ eine lineare Abbildung von zwei K-Vektorräumen X und Y. Man zeige: ist f injektiv, so ist das Bild einer linear unabhängigen Teilmenge $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ von X auch linear unabhängig.

Aufgabe 4-3

Es sei V der $\Re$-Vektorraum mit Basis $\{u_1, u_2\}$ und $f : V \to V$ eine lineare Funktion definiert als:

$f(u_1) = -3u_1 + 2u_2$

$f(u_2) = 4u_1 - u_2$

Man berechne $f(x_1u_1 + x_2u_2)$, $x_1, x_2 \in \Re$.

Aufgabe 4-4

Es sei $\varphi : X \longrightarrow Y$ eine lineare Abbildung und U ein Unterraum von $\Re$-Vektorraum X. Man beweise:

$\varphi^{-1}(\varphi(U)) = U + Ker(\varphi)$, where $(U + Ker(\varphi)) = \{w | w = u + k, u \in U, k \in Ker(\varphi)\}$.

Aufgabe 4-5

Es seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, und $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Ist w in $\{v_1, v_2, v_3\}$? Wie viel Vektoren gibt es in $\{v_1, v_2, v_3\}$?

(b) Wie viele Vektoren gibt es in $Span(v_1, v_2, v_3)$?

(c) Ist w in $Span(v_1, v_2, v_3)$?

Aufgabe 4-6

Es seien x und y zwei linear unabhängige Vektoren in $\Re-$Vektorraum V. Man zeige, dass $u = ax + by$ und $v = cx + dy$ linear unabhängig sind nur wenn $ad - bc \neq 0$ (a, b, c, d sind Skalare).

Aufgabe 4-7

Es seien $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Man zeige dass $\{v_1, v_2\}$ ein Span für $\Re^2$ ist. Man formuliere $\begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}$ anhand von $\{v_1, v_2\}$.

Aufgabe 4-8

Man untersuche für welche $t \in \Re$ die Vektoren

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 11 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear abhängig in $\Re^3$ sind.