Universität Wien
Institut für Informatik
Prof. Wilfried Gansterer, Prof. Claudia Plant

Mathematische Grundlagen der Informatik 1
WiSe 2016/17

Übungsblatt 3: Algebraische Strukturen II und Vektorräume I

Algebraische Strukturen II

Aufgabe 3-1

Sind die nachfolgenden Mengen zusammen mit den entsprechenden Verknüpfungen Ringe oder sogar Körper? ($\mathbb{Z}$ ist die Menge der ganzen Zahlen)

(a) $\mathbb{Z}/91Z$

(b) $\{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 3-2

Dividieren Sie jeweils die Polynome p mit Rest durch die Polynome q:

(a) $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1, q(x) = x^2 + 1$,

(b) $p(x) = x^5 - 1, q(x) = x - 1$.

Aufgabe 3-3

Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Sei ε ein Symbol, das kein Element von $\mathbb{R}$ repräsentiert. Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}[\varepsilon] := \{a + b\varepsilon | a, b \in \mathbb{R}\}$, und definieren darauf die beiden Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ durch

$$(a + b\varepsilon) \oplus (a' + b'\varepsilon) := (a + a') + (b + b')\varepsilon,$$

$$(a + b\varepsilon) \odot (a' + b'\varepsilon) := (aa') + (ab' + a'b)\varepsilon.$$

Weisen Sie nach, dass $(\mathbb{R}[\varepsilon], \oplus, \odot)$ ein Ring ist.

Aufgabe 3-4

Zeigen Sie, dass die Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}[\varepsilon]$ (Definition von $\mathbb{R}[\varepsilon]$ wie in der vorherigen Aufgabe) mit $g(r) = r + 0\varepsilon$ ein injektiver Ringhomomorphismus ist.

Vektorräume I

Aufgabe 3-5

Zeigen Sie, dass die Menge $V = \mathbb{R}^n$ gemeinsam mit der Vektoraddition

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

eine abelsche (d. h. kommutative) Gruppe bildet!

Aufgabe 3-6

Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen Teilräume des $\mathbb{R}^3$ sind!

(a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 5y - z = 0\}$

(b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 7y + 3z = 1\}$

Aufgabe 3-7

Sind die folgenden Abbildungen linear? Untersuchen Sie, ob sie injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind!

(a)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3-8

(a) Gegeben ist die bijektive lineare Abbildung $f : U \to V$. Zeigen Sie, dass die Umkehrabbildung $f^{-1} : V \to U$ ebenfalls eine lineare Abbildung ist. Ist f^{-1} bijektiv?

(b) Gegeben sind zwei bijektive lineare Abbildungen $g : U \to V$ und $f : V \to W$. Zeigen Sie, dass die Verknüpfung von f und g ($f(g)$ bzw. $f \circ g$) ebenfalls eine lineare Abbildung ist. Ist $f \circ g$ bijektiv?