Universität Wien
Institut für Informatik
Prof. Wilfried Gansterer, Prof. Claudia Plant

Mathematik für Informatiker
WiSe 2016/17

Übungsblatt 1: Beweistechniken, Mengen, Relationen und Abbildungen.

Beweistechniken

Aufgabe 1-1

Die Zahlen $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ldots$ sind von folgender rekursiver Formel gegeben:

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Man beweise durch Induktion, dass $F_{3k},\ k \in \mathbb{N}$ gerade Zahlen sind.

Aufgabe 1-2

Man untersuche die Folge:

$$a_1 = \frac{1}{1\cdot 2},\ \ a_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3},\ \ a_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4}, \cdots, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Man stelle eine Vermutung über den Ausdruck für a_n an, und beweise es durch Induktion, dass er für die natürlichen Zahlen gilt.

Aufgabe 1-3

Man beweise durch Induktion, dass $|P(A)|$ gleich $2^{|A|}$ ist. (Hinweis: $|\emptyset| = 0$)

Mengen

Aufgabe 1-4

Man beweise die folgenden Mengenrechenregeln:

(a) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$

(b) $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$

Aufgabe 1-5

Man beweise die folgenden Mengenrechenregeln:

(a) $M \subset N \Rightarrow \overline{N} \subset \overline{M}$

(b) $M \setminus N = M \cap \overline{N}$

Relationen

Aufgabe 1-6

Es sei $A := \{1, 2, 3, 4\}$ und die Relationen R_1 und R_2 auf A seien gegeben durch $R_1 = \emptyset$, $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (2, 1), (4, 4)\}$.

(a) Untersuchen Sie R_1 und R_2 bzgl. der Eigenschaften reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv.

(b) Man konstruiere R_2^* als kleinste Äquivalenzrelation, die R_2 enthält.

Aufgabe 1-7

Es sei R eine Äquivalenzrelation auf einer nichtleeren Menge X. Man zeige, dass dann für beliebige $x, y \in X$ entweder $[x] = [y]$ oder $[x] \cap [y] = \emptyset$ gilt.

Aufgabe 1-8

$R_7 := \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m - n \text{ ist ohne Rest durch 7 teilbar } \} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Zeigen sie, dass R_7 eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 1-9

Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 3x + 2$

(b) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2y, x + 1)$

Man berechne, falls möglich, die Umkehrabbildung von h.

Aufgabe 1-10 *

Es seien $f : X \to Y$ eine Abbildung, $A, B \subset X$ sowie $C, D \subset Y$ und $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$. Zu zeigen:

(a) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Unter welcher Voraussetzung gilt die Gleichheit?

(b) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.